203	**Séries à termes réels ou complexes: convergence absolue, semi-convergence.**	Règle d'Abel, application.	Monier, Gourdon, Pommelet, Capes.

Les résultats sur les séries à termes réels positifs sont supposés connus. (Cf.leçon 202).

On pose $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E est donc un Banach (evn complet). On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in E$.

I. Séries absolument convergentes.

On va définir l'absolue convergence, et essayer de voir si elle est compatible avec les lois du K-ev E: Somme, multiplication par un scalaire, puis le "produit".

A. Définition et théorème fondamental.

Def.1: (MON) On dit que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est **absolument convergente** ssi $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.

Prop.1: (MON) Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont abs. cv, alors pour tout $\lambda \in E$, $\sum_{n\geq 0} (u_n + \lambda v_n)$ est abs. cv.

Prop.2: (MON) $\sum_{n\geq 0} u_n$ **abs. cv** $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ **cv** (1)

et $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$

Contre-exemple: La réciproque est fausse, Séries de Riemann alternées $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

Pour étudier la cv d'une série, on essaie d'abord de rechercher l'abs. cv, ce pour quoi on dispose de tous les outils (comparaisons, séries de référence) des séries à termes positifs. Mais si elle n'est pas abs. cv, elle ne diverge pas pour autant.

B. Produit de Cauchy.

Def.2: (MON) On appelle **produit de Cauchy** de $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ définie par:

$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = \sum_{p+q=0}^{n} u_p v_q$ (2)

Prop.3: (MON) Si les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont abs. cv, alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\geq 0} w_n$ est abs. cv, et:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Application: (MON)
$\forall (z,z') \in \mathbb{C}, \exp(z+z') = \exp(z).\exp(z')$ (3)

Contre-exemple: (POM) Cette Prop. est fausse pour des séries non abs. cv: prendre $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (4).

C. Séries commutativement convergentes(GOU)

Def.3: (GOU) On appelle **séries commutativement convergentes** les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ tq. pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geq 0} u_{\varphi(n)}$ converge.

Remarque: $\sum_{n\geq 0} u_n$ com. cv $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ cv. *(prendre φ=Id).*

Prop.4: (GOU) $\sum_{n\geq 0} u_n$ abs. cv $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ comm. cv , et $\forall \varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{BIJ} \mathbb{N}$, $\sum_{n\geq 0} u_{\varphi(n)} = \sum_{n\geq 0} u_n$ (5).

Remarque: La réciproque est vraie pour les séries Réelles. (MON)

II. Séries semi-convergentes.

Def.4: On dit que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est **semi-convergente** ssi elle est cv , mais non absolument cv. (MON)

A. Séries alternées.

Def.4:(MON)On dit que $\sum_{n\geq 0} u_n$ à termes $\mathbb{R}$ est **alternée** ssi:

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n |u_n|$ ou $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -(-1)^n |u_n|$.

Prop.5: (MON)**TSSA**. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ à termes $\mathbb{R}$.

Si $\begin{cases} \sum_{n\geq 0} u_n \text{ est alternée} \\ u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0 \\ (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \searrow \end{cases}$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. (6)

Exemple: Série de Riemann alternée $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, α fixé.

$\begin{cases} \text{Si } \alpha\leq 0, \text{ diverge grossièrement;} \\ \text{Si } 0<\alpha\leq 1, \text{ semi-convergente par le TSSA;} \\ \text{Si } \alpha>1, \text{ absolument cv.} \end{cases}$

Méthode: (MON) Si le TSSA ne peut pas s'appliquer, on utilise un **développement asymptotique** à l'infini.

Cas de figure: série alternée dont le $|u_n|$ *contient encore du* $(-1)^n$.

Exemple: $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$. (7)

B. Règle d'Abel. (Capes)

C'est une généralisation du TSSA, que l'on retrouve en posant $v_n = (-1)^n$. Elle s'applique dans tout E Banach. C'est l'équivalent pour les Σ de l'IPP pour les ∫.(Gourdon)

Prop.6:(CAP) Soient $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite ℝ ↘0, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K, à sommes partielles bornées, i.e. tq. ∃M∈ℝ+:

$$\forall n\in\mathbb{N}, \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq M$$

Alors la série $\sum_{n\geq 0}\varepsilon_n a_n$ converge.

Exemple:(CAP) Pour tous $\theta\in\mathbb{R}-2\pi\mathbb{Z}$, $\alpha\in]0;1]$,

$\sum_{n\geq 1}\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ cv.

III. Notes.

(1) Cette Prop. n'est valable que dans E Banach, car elle utilise le critère de Cauchy:

Critère de Cauchy pour les séries (GOU): Une série $\sum_{n\geq 0}u_n$ à valeurs dans E(*) converge ssi:

$$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}: \forall n\geq N, \forall p\in\mathbb{N}, \left\|u_n+\ldots+u_{n+p}\right\|<\varepsilon$$

(*) *Ce critère est vrai dans E Banach.*

(2) Le produit de Cauchy est parfois appelé "produit de convolution" (POM).

(3) Pour tout $z\in\mathbb{C}$, la série $\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$ est abs. cv.

On applique alors le produit de Cauchy et le binôme de Newton.

(4) Pommelet p.144.: $w_n = (-1)^n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$, mais $k(n-k)\leq n^2$, donc $\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}\geq\frac{1}{n}$, et donc $|w_n|\geq 1$, et la série $\sum_{n\geq 0}w_n$ diverge grossièrement.

(5) Vrai dans E Banach.
Pour les séries ℝ, la réciproque est ds Monier p.290.

(6) Démo **TSSA**. Quitte à passer à l'opposé, on suppose : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = (-1)^n|u_n|$. On note S_n la n^ième somme partielle. Montrons que les suites $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. ∀p∈ℕ, on a:

$S_{2p+2}-S_{2p} = u_{2p+1}+u_{2p+2} = -|u_{2p+1}|+|u_{2p+2}|\leq 0$,

donc la suite $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est ↘.

$S_{2p+3}-S_{2p+1} = u_{2p+2}+u_{2p+3} = |u_{2p+2}|-|u_{2p+3}|\geq 0$,

donc la suite $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ est ↗.

$S_{2p+1}-S_{2p} = u_{2p+1}\xrightarrow[p\infty]{} 0$

Donc elles sont bien adjacentes, par suite elles cv et ont la même limite.

Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv vers cette limite, i.e. $\sum_{n\geq 0}u_n$ cv.

(7) Développement asymptotique.

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Or :

$\sum_n\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est semi-cv.

$\sum_n\frac{1}{n}$ diverge

$\sum_n O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ est abs. cv.

Donc la série proposée dv.

Remarque: On a $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\sim\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, et pourtant les séries de terme général resp. ces expressions ne sont pas de même nature: c'est un bon contre-exemple à l'utilisation des règles de comparaison sur des séries à termes de signe non constant.